

11章 階層線形モデル

教育学研究科M1 西口 美穂

@6/7心理データ解析演習

目次

- 階層線形モデルとは？
- マルチレベルモデルの概要
 - 階層性のあるデータとは？
 - なぜ階層性に対応する必要があるか
 - データの階層性の評価方法
- 階層線形モデルの概要
 - 回帰分析との違い
 - 固定効果と変量効果
 - 集団レベルの変数の投入
 - データの中心化について
- サンプルデータの概要
- Rによるサンプルデータの解析

階層線形モデル(HLM)とは

- マルチレベルモデルのひとつ
- RaudenbushとBrykによって考案
- 回帰分析を階層的なデータに対応させたもの
- マルチレベルモデルの中では最も多く利用される

マルチレベルモデルの概要

階層性のあるデータとは？

- たとえば，学生を対象に調査を実施するとき，多くは調査が学級・学校単位になる
- このようなデータは階層的な構造を持つ

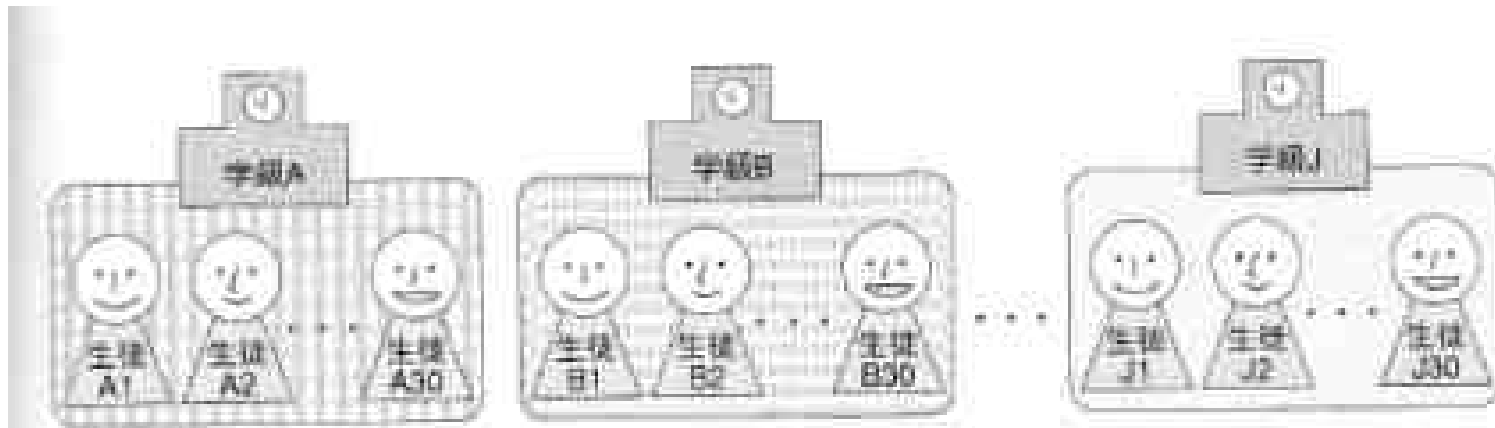


図 11-3 階層的データの例（2レベルの階層的データ）（森本，2000）

階層性のあるデータとは？

- 学級・生徒間以外にも階層構造を持つデータにはさまざまなものがある
 - 複数の国の人から集めたデータ
 - ペアデータ(10章参照)
 - 反復測定データ
- また、階層も2段階とは限らない
 - 学級単位で反復測定をすれば、学級-生徒-測定時点の3レベルの階層構造ができる

なぜ階層性に対応する必要があるか

- ①通常の変帰分析では集団の異質性による違いを反映できない
 - 集団内で相関があったとしても、集団間でその相関に違いがあれば、全体では相関がないとみなされてしまうかもしれない

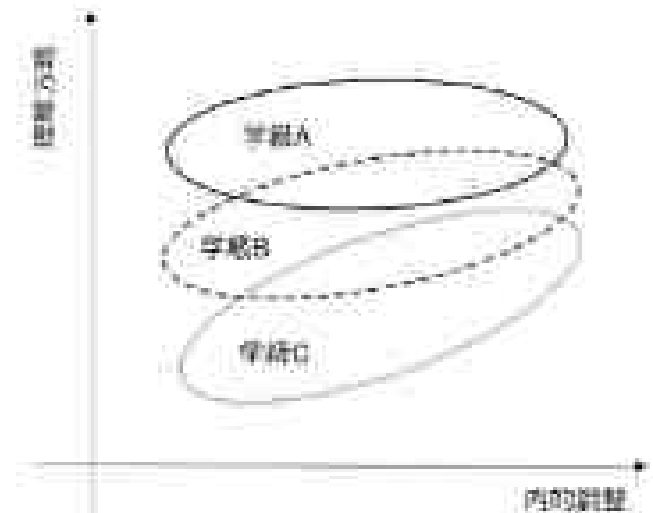


図11-5 3つの学級と全体の存在図

なぜ階層性に対応する必要があるか

- このことは、サンプルの独立性仮定にも違反する
 - 統計学的方法論は、サンプルが独立に抽出されているのが前提
 - 集団内の類似性が高いことを無視して分析を行うと、自由度の水増しにより推定値の標準誤差が小さく推定され、第一種の過誤につながる

なぜ階層性に対応する必要があるか

- ②得られた効果が解釈できない
 - たとえば，複数の大学にわたって調査を行った結果「下宿生or自宅生」と「全国模試の成績」に関連があったとする
 - 「下宿する人は成績がよい」？
 - 「下宿生の多い大学は成績のよい学生が多い」？
 - 従来の回帰分析では，この区別がつかない

なぜ階層性に対応する必要があるか

<限定的な対処方法>

- ①集団ごとの平均値を算出して，集団単位で分析する
 - サンプルの非独立性の問題は解決可能
 - しかしデータを集団で平均化しても，個人単位の効果は混在しているため，解釈の問題は解決できない
 - さらに，データを大幅に損失してしまうため，標準誤差を過剰に大きく見積もってしまう

なぜ階層性に対応する必要があるか

<限定的な対処方法>

- ②集団を識別する要因をモデルに組み込むことで、集団の効果をコントロールする
 - 個人と集団の効果が混在することは避けられる
 - ただし、集団の効果そのものは分からなくなる

なぜ階層性に対応する必要があるか

<限定的な対処方法>

- ③集団から1つだけデータを選んで分析
(ペアデータなど)
 - データの階層性そのものがなくなるため階層性の問題は解決されるが、データの損失は避けられない
 - 個人と集団の階層性の検討もできない
- ではどうするのか？
→マルチレベルモデルを使おう！

データの階層性の評価方法

- ①級内相関係数
(intra-class correlation coefficient: ICC)
 - 集団内類似度の指標
 - $ICC = \frac{(MSB - MSW)}{(MSB + (k^* - 1)MS_W)}$
 - k^* : 集団内の平均的な人数
 - MS_B : 集団間の分散
 - MS_W : 集団内の分散
 - 言い換えるなら, $ICC = \text{集団レベルの分散} / \text{全体の分散}$
 - 有意であるか0.1以上あればマルチレベルモデルを適用したほうがよい

データの階層性の評価方法

- ②デザインエフェクト (Design Effect: DE)
 - ICCに対し集団内の人数の影響を考慮に入れたもの
 - 集団内の人数が多いほど、同じ級内相関でも階層性がより深刻である
 - $DE = 1 + (k^* - 1)ICC$
 - k^* : 集団内の平均的な人数
 - 2以上あればマルチレベルモデルを適用したほうがよい

データの階層性の評価方法

- ③従来の回帰モデルとのAIC比較
 - ICCやDEのカットオフポイントは経験的に定められたもの
 - ICCが0.1未満かつDEが2未満でもマルチレベルモデルを適用した方がよい場合がある
 - 切片に変量効果(後述)を仮定したモデルでAICが改善されていれば、マルチレベルモデルを適用した方がよい
- 今回用いるサンプルデータはこのパターン

データの階層性の評価方法

- 基本的にデータが階層的であればマルチレベルモデルを使うことを考慮に入れたほうがよいが、集団数が極端に少ない場合($N = 2$ など)は適切とはいえないことも
- どれだけ集団数が必要かどうかは検定力分析などで判断するとよい

階層線形モデルの概要

回帰分析との違い

- ある集団に着目したときの回帰式
 - 目的変数 $y_i = \beta_0 + \beta_1 * \text{説明変数}_i + e_i$
 - 集団ごとに回帰係数が得られる
 - 最小二乗法で推定
- しかし、今回は集団がたくさんある
- たくさんの集団から生じる回帰式をひとつのモデルで表現したい

回帰分析との違い

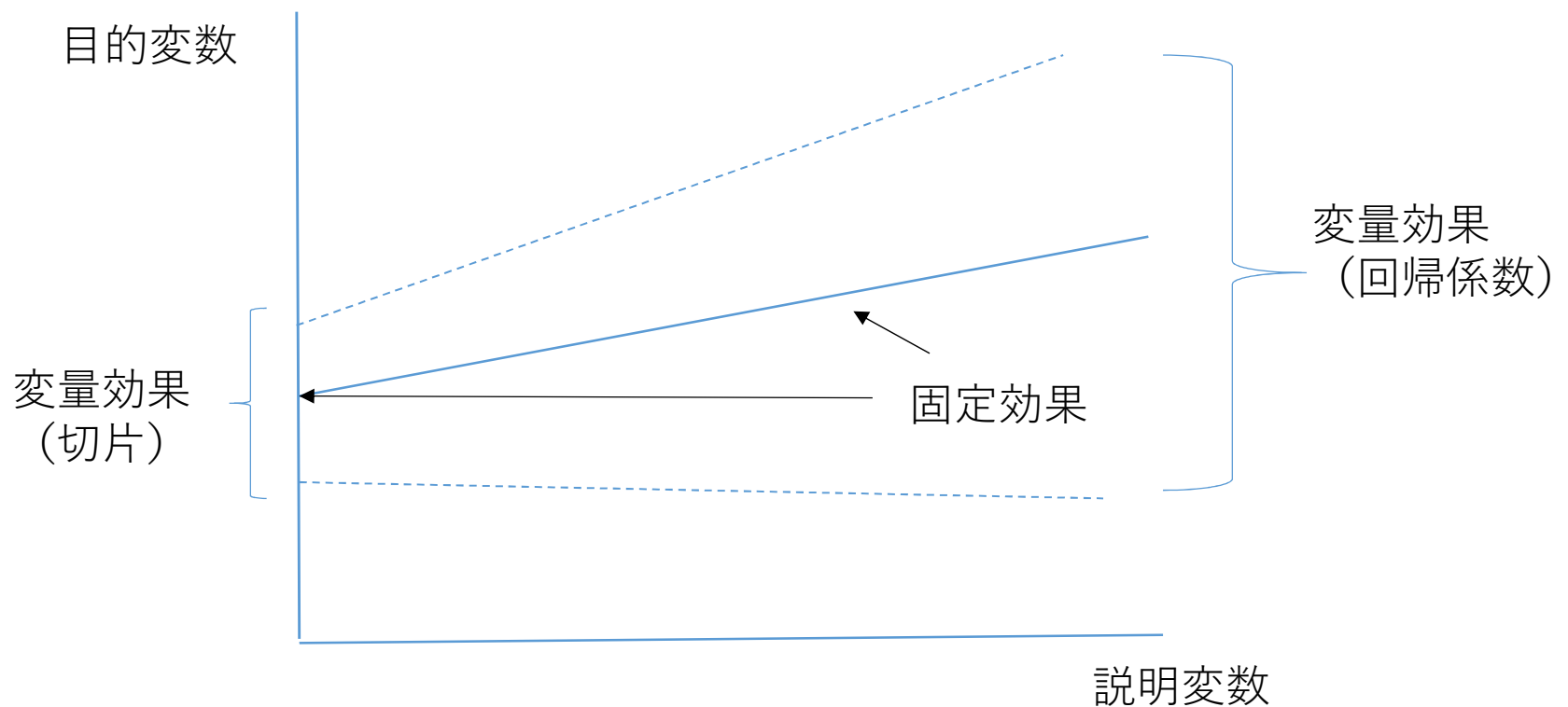
- 階層線形モデルはこれが可能
 - <レベル1(個人)の式>
 - 目的変数 $y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} * \text{説明変数}_{ij} + e_{ij}$
 - <レベル2(集団)の式>
 - $\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$
 - $\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$
- いわゆる回帰分析の回帰分析
- 切片(β_{0j})・回帰係数(β_{1j})を固定効果(γ_{00}, γ_{10})・変量効果(u_{0j}, u_{1j})に分けて推定
- 最尤法で推定

固定効果と変量効果

- 固定効果
 - モデルによって推定されるパラメータが定数として得られるもの
 - 回帰分析における切片や回帰係数など
- 変量効果
 - 人や集団によってパラメータが違っていて、確率的に変動するもの
 - 実は回帰分析の残差(e_i)も変量効果
 - 表記にiやjなどの添え字がつけられる

固定効果と変量効果

- 階層線形モデルは、切片や傾きについて、固定効果と変量効果を同時に推定できる



固定効果と変量効果

- もちろん，どちらか一方にのみ変量効果を仮定するモデルもある
 - 切片にのみ変量効果を仮定する場合
(回帰係数に集団間変動はない場合)
 - <レベル1(個人)の式>
 - 目的変数 $_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} * \text{説明変数}_{ij} + e_{ij}$
 - <レベル2(集団)の式>
 - $\beta_{0j} = \gamma_{00} + u_{0j}$
 - $\beta_{1j} = \gamma_{10}$

固定効果と変量効果

- どのような基準で変量効果を仮定するか？
 - ①説明変数の級内相関係数が有意
 - ②回帰係数の(集団の)分散成分が有意
 - ただし①, ②はサンプルサイズに依存する
 - ③尤度比検定を利用
 - 複雑なモデルとその次に複雑なモデルの対数尤度の差の有意性を判定(非有意の場合はより単純なモデルの方がよい)
 - ただし, 一方のモデルがもう一方のモデルの一部を制限した(ネストされた)ものでなければならない
 - ④AICやBICなどの情報量基準を利用
 - モデル同士がネスト関係にある必要がない
 - 尤度比検定よりも広く使われる
 - 変量効果を仮定したモデルのほうが仮定しないモデルよりもAIC/BICが小さくなっていたら, 変量効果を仮定すべき

補足：最小二乗法と最尤法

- 最小二乗法
 - 残差(変量効果, e_i)を最小にする方法
 - マルチレベルモデルでは、複数の変量効果が想定されるため、最小二乗法の結果は適切ではない
 - 最尤法
 - 多くの推定値を同時に推定できる
 - 尤度関数に基づいて、尤度(もっともらしさ)を最大にするモデルを推定
 - 集団の数が小さい場合は、変量効果の分散成分が過小評価される
- 対処法：制限つき最尤法(REML)
- 変量効果についてのみ最尤法を適用する
 - ただし固定効果の尤度を計算しないため、どの変数を固定効果としてモデルに含めるべきかは判断できなくなる

集団レベルの変数の投入

- 階層線形モデルでは、切片や回帰係数が集団間で異なる場合に、集団レベルの変数とその差異を説明できるかを検討できる
 - この場合、
 - <レベル1(個人)の式>
 - 目的変数 $_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j} * \text{説明変数}_{ij}(\text{個人}) + e_{ij}$
 - <レベル2(集団)の式>
 - $\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} * \text{説明変数}(\text{集団}) + u_{0j}$
 - $\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11} * \text{説明変数}(\text{集団}) + u_{1j}$

集団レベルの変数の投入

- レベル2の式をレベル1の式に代入すると,
目的変数_{ij} = $(\gamma_{00} + \gamma_{01} * \text{説明変数(集団)} + u_{0j}) +$
 $(\gamma_{10} + \gamma_{11} * \text{説明変数(集団)} + u_{1j}) * \text{説明変数}_{ij}(\text{個人}) + e_{ij}$

 $= \gamma_{00} + \gamma_{01} * \text{説明変数(集団)}$
 $+ \gamma_{10} * \text{説明変数}_{ij}(\text{個人})$
 $+ \gamma_{11} * \text{説明変数(集団)} * \text{説明変数}_{ij}(\text{個人})$
 $+ u_{0j} + \text{説明変数}_{ij}(\text{個人}) * u_{1j} + e_{ij}$
- γ_{11} は集団レベルの変数と個人レベルの変数との
交互作用の効果である(レベル間交互作用)
 - これにより, 集団レベルの変数が個人レベルの変数と目的変数との関係をどのように調整しているのかがわかる

変数の中心化

- 集団平均中心化(centering within cluster: CWC)
 - 個人の得点から、その個人が所属する集団の得点の平均値を引く
 - 個人レベルの得点から集団の効果を取り除ける
- 全体平均中心化(centering using grand mean: CGM)
 - 変数の全体の平均値を各得点から引く
 - 回帰係数は変化しないが、レベル間交互作用を扱うときにレベル2の変数に施すと解釈がしやすくなる
 - レベル1の回帰係数はレベル2の回帰係数が0であった場合の値であるから、レベル2の変数が概念上0を取りえないときは便利

変数の中心化

- レベル1の説明変数の中心化の使い分け (尾崎,2009)
 - ①個人レベルの説明変数の影響に関する研究
→CWC
 - ②集団レベルの説明変数の影響に関する研究
→CGM
 - ③個人レベルの説明変数と集団レベルの説明変数の影響の比較→どちらでもOK
 - ④レベル間交互作用の検討→CWC

サンプルデータの概要

データの概要

- 学習動機付けは学習方略の使用にどのような影響を与えるのか
- 教師の指導方略が学習方略の使用、学習動機付けと学習方略使用の関係にどのような影響を与えるのか

データの概要

- 縦断調査
- 複数の学校・学級に所属する中学1年生～3年生と，その生徒を担当する数学教師が対象
- 時点1と時点2の生徒データと教師データをもとに分析を行う

データの概要

- 生徒質問紙
 - 学習動機付け
 - 外的調整(gaiteki): 外発的動機付けに相当
 - 取り入れ的調整(toriire): 「友達よりもよい成績をとりたいたから学習する」など
 - 同一化的調整(douituka): 「希望する大学や高校に行きたいから学習する」など
 - 内的調整(naiteki): 内発的動機付けに相当
 - 学習方略(2時点にわたって調査)
 - 理解方略(rikai1,2): 公式・解法の意味を理解しようとしたり, 関連付けたりする方略
 - 暗記方略(anki1,2): 公式・解法の意味を理解しようせず, 丸暗記に頼る方略

データの概要

- 教師質問紙
 - 意味理解重視方略(rikai_t)
 - 公式や解法の意味を理解させることを重視して授業を進める方略
 - 日常関連付け方略(nichijo_t)
 - 授業内容と日常生活との関連を示しながら授業を進める方略

Rによるサンプルデータの解析

注：サンプルデータにはダミーデータが入っている + 分析ツールがテキストと異なっているため、推定モデル・得られる結果はテキストに示されているものとは異なる

Rの起動とデータのコピー

- 「スタート」 → 「すべてのプログラム」
→ 「表計算・統計」
→ 「R」 → 「R 3.3.2」
- 「データ(11章).csv」をExcelで開き、
データを全て選択してコピー
(Ctrl + Aで全て選択できる)

データとスクリプトの読み込み

- Rの画面に`dat<-read.table("clipboard", header=T)`と直接入力してEnterを押す
 - 何もエラーが出なければOK
 - `dat` という入れ物にデータが格納された
- 次に、メニューから
File→Open script→dataanalysis11th.Rを選択
 - もうひとつウィンドウが出てくる
 - エディタと呼ばれるもので、入力したスクリプトを保存したり、先に作っておいたスクリプトを実行したりできる

データの確認

- エディタで, "head(dat,3)#最初の3行表示"を選択して, Ctrl + Rで実行
- datの中に正しくデータが入っていることが確認できる

```
> head(dat,3)#最初の3行表示
```

```
  student class naiteki douituka toriire gaiteki rikai1 rikai2 anki1
1       1     1       4     4.00    2.33    1.67    3.00    3.33    4.67
2       2     1       4     3.67    2.00    1.67    4.33    4.67    2.67
3       3     1       1     1.33    2.33    3.00    3.00    3.00    4.33
```

```
  anki2 rikai_t nichijo_t
```

```
1  4.00     4.5         3
2  3.00     4.5         3
3  4.33     4.5         3
```

```
>
```

```
> |
```

パッケージの読み込み

- 階層線形モデルの推定には”lmerTest”というパッケージが必要
- サテライトのPCには既にインストールされているようなので、エディタの `library(lmerTest)#lmerTest` を参照を選択してCtrl+R
 - 何かメッセージが出てくるが無視する

集団ごとの散布図を出す

#理解2と外的調整（説明変数の中から任意で選択）
のクラスごとの散布図を描画

```
library(lattice)
```

```
xyplot(rikai2~gaiteki|class,data = dat,panel=function(x,y){
```

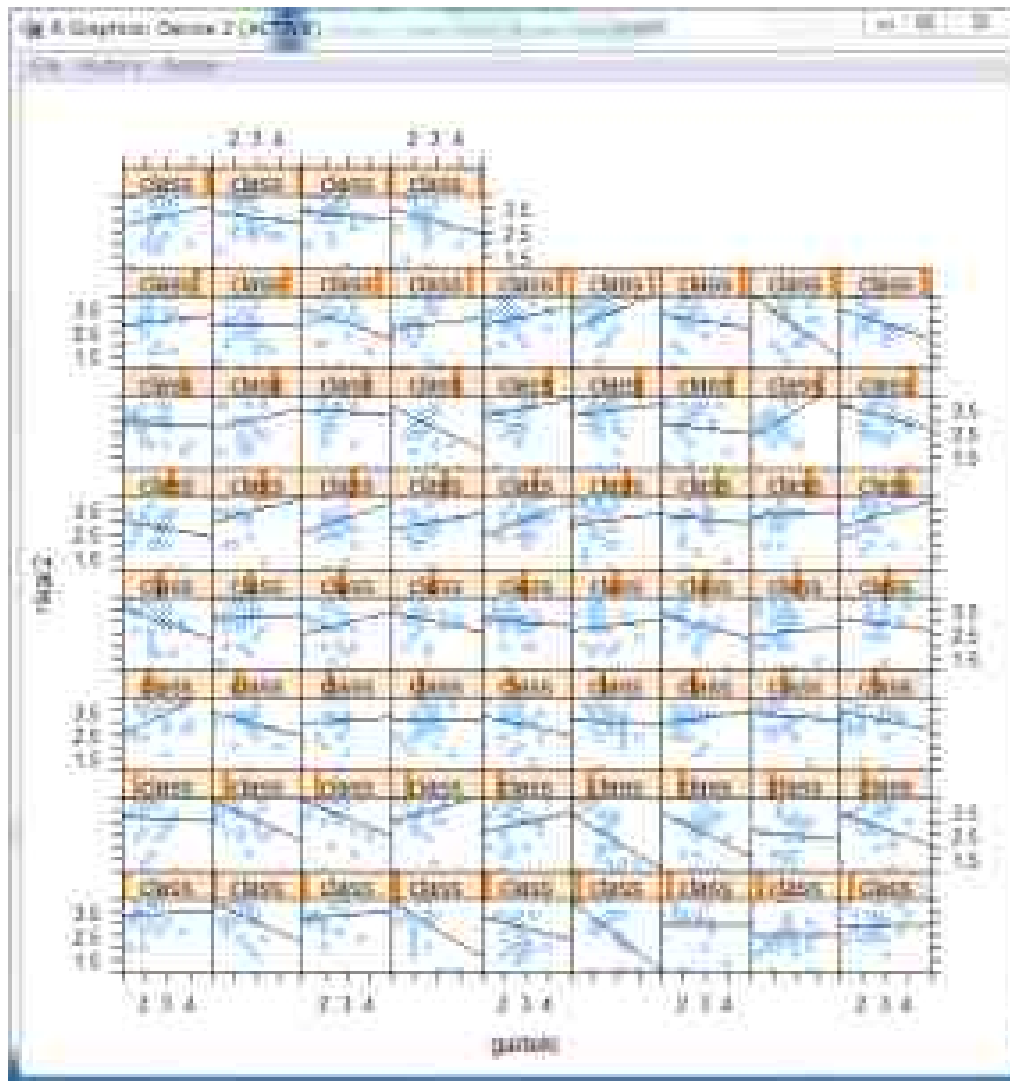
```
panel.xyplot(x,y)
```

```
panel.lmline(x,y)},
```

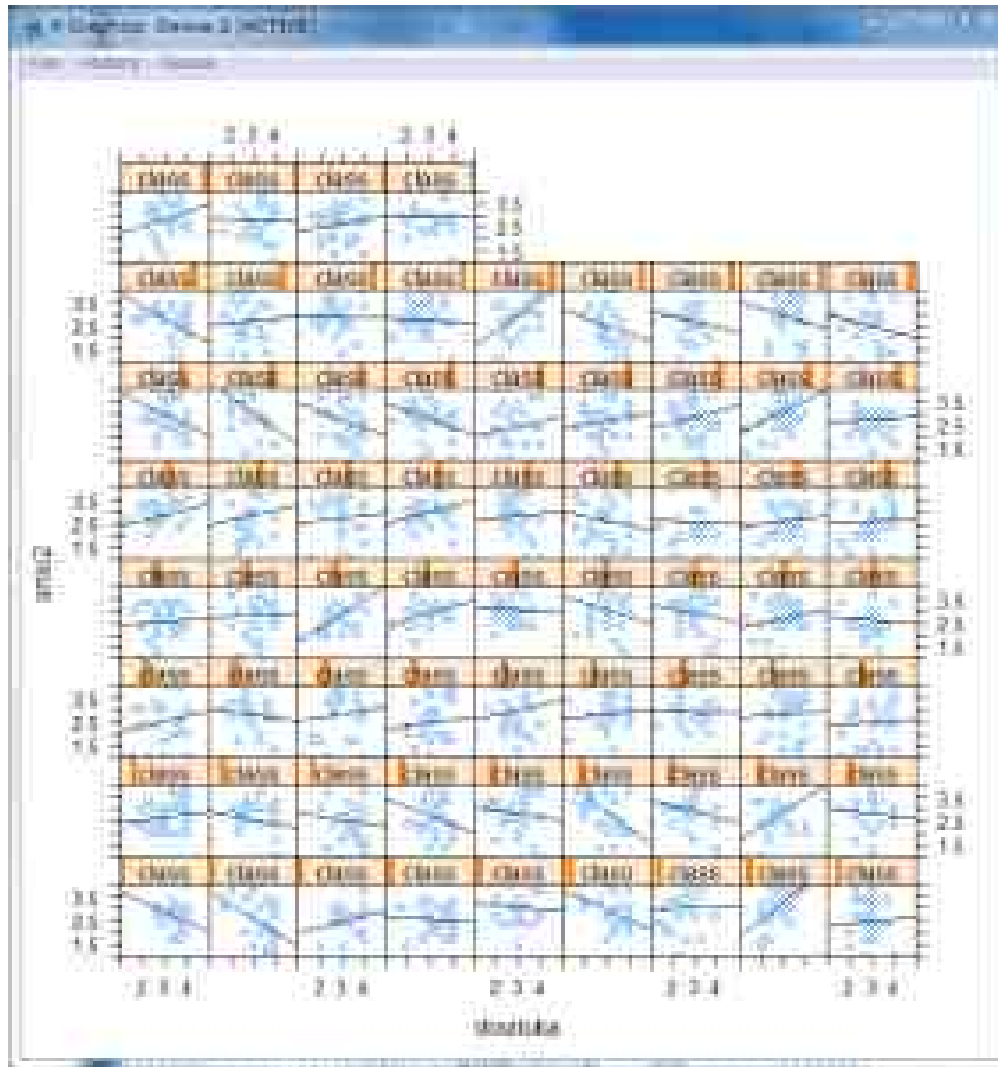
```
xlim=c(1,5),
```

```
ylim=c(1,4))
```

- 以上をまとめて選択して実行
- rikai2とgaitekiの関連性について見てみる



- 集団ごとに
回帰係数や切片が
異なっている様子
がわかる



- anki2についても同様 (douitukaとanki2を対象とした)
- 集団ごとに回帰係数や切片が異なっている様子がわかる

級内相関の計算

- model0.rikai2を作成
- model0.rikai2<-
lmer(rikai2 ~ (1|class), data=dat, REML=F)

REMLは使わない
= 最尤法を使う

目的変数

切片(1)がクラスごと
に違うことを仮定

dat をデータ
として使う

- 説明変数を入れずに目的変数のみで作成されたモデルをヌルモデルという
- 目的変数の分散を集団レベルの分散とそれ以外で説明するため、級内相関が算出できる
- 上の式とsummary(model0.rikai2)をまとめて実行

```

>
> #理解に関するnullモデルから級内相関を計算
> model0.rikai2<-lmer(rikai2~(1|class),data=dat,REML=F)
> summary(model0.rikai2)
summary from lme4 is returned
some computational error has occurred in lmerTest
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: rikai2 ~ (1 | class)
Data: dat

      AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 5394.6  5411.4 -2694.3  5388.6    1997

Scaled residuals:
   Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.4114 -0.5777  0.0136  0.6698  2.3367

Random effects:
 Groups   Name      Variance Std.Dev.
 class   (Intercept) 0.02031  0.1425
 Residual                0.85080  0.9224
Number of obs: 2000, groups: class, 67

Fixed effects:
              Estimate Std. Error t value
(Intercept)    3.050      0.027    113

```

集団レベルの分散

その他の分散

$$ICC = 0.02031 / (0.02031 + 0.85180) = 0.0233$$

$$DE = 1 + (2000/67 - 1) * 0.0233 = 1.673$$

```

> #暗記に関するnullモデルから級内相関を計算
> model0.anki2<-lmer(anki2~(1|class),data=dat,REML=F)
> summary(model0.anki2)
summary from lme4 is returned
some computational error has occurred in lmerTest
Linear mixed model fit by maximum likelihood ['lmerMod']
Formula: anki2 ~ (1 | class)
Data: dat

      AIC      BIC   logLik deviance df.resid
 5035.2  5082.0 -2514.6  5029.2   1997

Scaled residuals:
   Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.16962 -0.58186 -0.06862  0.64233  2.72580

Random effects:
 Groups   Name      Variance Std.Dev.
 class   (Intercept) 0.008578 0.09262
 Residual                    0.716395 0.84640
Number of obs: 2000, groups: class, 67

Fixed effects:
              Estimate Std. Error t value
(Intercept)  2.76561     0.02206   125.4
>
>
> |

```

暗記も同様に

集団レベルの分散

その他の分散

$$ICC = 0.008578 / (0.008578 + 0.716395) = 0.0118$$

$$DE = 1 + (2000/67 - 1) * 0.0118 = 1.341$$

説明変数の中心化

- 以下に示されたスクリプトをまとめて実行

```
> #####変数の中心化#####
> #説明変数を集団平均で中心化
> dat<-transform(dat,
+ naiteki.cwc=naiteki-ave(naiteki, class),
+ douituka.cwc=douituka-ave(douituka, class),
+ toriire.cwc=toriire-ave(toriire, class),
+ gaiteki.cwc=gaiteki-ave(gaiteki, class),
+ rikail.cwc=rikail-ave(rikail, class),
+ ankil.cwc=ankil-ave(ankil, class))
>
> #データセットに追加されているかを確認
> head(dat, 3)
  student class naiteki douituka toriire gaiteki rikail rikai2 ankil
1         1     1         4      4.00    2.33    1.67    3.00    3.33    4.67
2         2     1         4      3.67    2.00    1.67    4.33    4.67    2.67
3         3     1         1      1.33    2.33    3.00    3.00    3.00    4.33
  anki2 rikai_t nichijo_t naiteki.cwc douituka.cwc toriire.cwc
1  4.00    4.5      3      1.356897    0.6548276    0.1237931
2  3.00    4.5      3      1.356897    0.3248276   -0.2062069
3  4.33    4.5      3     -1.643103   -2.0151724    0.1237931
  gaiteki.cwc rikail.cwc ankil.cwc
1 -0.3193103 -0.7468966  1.8537931
2 -0.3193103  0.5831034 -0.1462069
3  1.0106897 -0.7468966  1.5137931
>
> |
```

各得点から集団平均を引いた値をdatに追加

正しく追加されていることがわかる

重回帰分析とのAIC比較

- 重回帰分析はlm関数で行う
- 集団平均中心化した説明変数とともに使用
- 以下のスクリプトを実行
 - ~と(1|class)の間にあるのが独立変数

```
> #####rikai2に対するRLMと重回帰分析の比較 (AIC使用)#####  
>  
> #理解モデル1: 切片に変量効果を想定したモデルを計算(テキストにしたがって最尤法)  
> modell.rikai2<-lmer(rikai2~rikai1.cwo+nsiteki.cwo+douituka.cwo+toriire.cwo+gaiteki.cwo+(1|class),  
+ data=dat, REML=F)  
> #理解モデルreg: 切片にも説明変数にも変量効果を仮定しない(集団平均中心化変数を使用)  
> modelreg.rikai2<-lm(rikai2~rikai1.cwo+nsiteki.cwo+douituka.cwo+toriire.cwo+gaiteki.cwo, data=dat)  
>  
> #モデル間比較 (AICより)  
> AIC(modell.rikai2,modelreg.rikai2)  
                df      AIC  
modell.rikai2    8 4457.830  
modelreg.rikai2  7 4303.316  
>  
>
```

切片に変量効果を仮定したほうが
AICが改善されている
= 目的変数は階層性の影響を
受けている

重回帰分析とのAIC比較

- anki2についても同様

```
> #####anki2に対するHLMと重回帰分析の比較 (AIC使用)#####  
> #暗記モデル1: 切片に变量効果を想定したモデルを計算  
> model1.anki2<-lmer(anki2~anki1.cwc+naiteki.cwc+douituka.cwc+toriire.cwc+gaiteki.cwc+(1|class),  
+ data=dat, REML=F)  
> #暗記モデルreg: 切片にも説明変数にも变量効果を仮定しない(集団平均中心化変数を使用)  
> modelreg.anki2<-lm(anki2~anki1.cwc+naiteki.cwc+douituka.cwc+toriire.cwc+gaiteki.cwc,data=dat)  
> AIC(model1.anki2,modelreg.anki2)  
          df      AIC  
model1.anki2    8 4529.275  
modelreg.anki2    7 4540.023  
>  
> |
```

切片に变量効果を仮定したほうが
AICが改善されている
= 目的変数は階層性の影響を
受けている

説明変数の変量効果を仮定する

- どの説明変数に変量効果を仮定すべきか？
- スライド22の④を利用
- 想定されうる全てのモデルを作成し、そのAICが最も低いものを用いる
 - 今回の場合、5個の説明変数のうち0～5個が変量効果として仮定されうるから、計32通りのモデルがある
- スクリプト内のmodel1.rikai2の式からmodel32.rikai2の式までをまとめて実行


```
      df      AIC
modell.rikai2    8 4457.830
model2.rikai2   10 4456.950
model3.rikai2   10 4458.394
model4.rikai2   10 4461.731
model5.rikai2   10 4460.617
model6.rikai2   10 4458.119
model7.rikai2   13 4459.844
model8.rikai2   13 4462.507
model9.rikai2   13 4461.338
model10.rikai2  13 4455.597
model11.rikai2  13 4464.264
model12.rikai2  13 4463.772
model13.rikai2  13 4458.920
model14.rikai2  13 4466.615
model15.rikai2  13 4462.813
model16.rikai2  13 4461.112
model17.rikai2  17 4467.188
model18.rikai2  17 4466.411
model19.rikai2  17 4461.316
model20.rikai2  17 4468.401
model21.rikai2  17 4463.120
model22.rikai2  17 4462.206
model23.rikai2  17 4471.451
model24.rikai2  17 4468.147
model25.rikai2  17 4466.058
model26.rikai2  17 4468.400
model27.rikai2  22 4479.391
model28.rikai2  22 4470.560
model29.rikai2  22 4470.004
model30.rikai2  22 4471.204
model31.rikai2  22 4475.573
model32.rikai2  28 4480.537
```

```
>
> |
```

- モデルの作成が終わったら全てのモデルのAICを算出
- ★ model10.rikai2(rikai1と gaitekiに
変量効果を仮定)したものが最もAICが低い
- summary(model10.rikai2)を実行してモデルの中身を見る

```

> summary(modell10.rikai2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood t-tests use Satterthwaite
approximations to degrees of freedom [lmerMod]
Formula:
rikai2 ~ rikail.cwc + naiteki.cwc + douituka.cwc + toriire.cwc +
  gaiteki.cwc + (1 + rikail.cwc + gaiteki.cwc | class)
Data: dat

      AIC      BIC    logLik deviance df.resid
 4455.6   4528.4  -2214.8   4429.6   1987

Scaled residuals:
   Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.9358 -0.6532  0.0213  0.6603  4.0314

Random effects:
 Groups   Name                Variance Std.Dev. Corr
class    (Intercept)          0.032393  0.17998
         rikail.cwc          0.006607  0.08128  -0.54
         gaiteki.cwc        0.013363  0.11560   0.25  0.68
Residual                    0.509709  0.71394

Number of obs: 2000, groups: class, 67

Fixed effects:
              Estimate Std. Error      df t value Pr(>|t|)
(Intercept)   3.04923    0.02718  66.10000  112.172 <2e-16 ***
rikail.cwc    0.48951    0.02370  148.60000   20.655 <2e-16 ***
naiteki.cwc   0.22549    0.02660  1925.30000    8.477 <2e-16 ***
douituka.cwc  0.06445    0.02659  1925.10000    2.424  0.0154 *
toriire.cwc  -0.01938    0.02757  1926.60000   -0.703  0.4822
gaiteki.cwc   0.02602    0.02960   96.40000    0.879  0.3815
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Correlation of Fixed Effects:
              (Intr) rkl.cw ntk.cw dtk.cw trr.cw
rikail.cwc  -0.183
naiteki.cwc  0.000 -0.370
douituk.cwc  0.000 -0.230 -0.145
toriire.cwc  0.000 -0.022 -0.215 -0.252
gaiteki.cwc  0.095  0.196  0.177 -0.049 -0.322

```

変量効果の分散

固定効果の回帰係数
標準誤差
自由度
t 値
回帰係数の有意性検定

固定効果同士の相関

```

      df      AIC
model11.anki2    8 4529.275
model12.anki2   10 4544.694
model13.anki2   10 4530.962
model14.anki2   10 4529.539
model15.anki2   10 4532.158
model16.anki2   10 4529.066
model17.anki2   13 4531.046
model18.anki2   13 4529.363
model19.anki2   13 4531.971
model110.anki2  13 4527.900
model111.anki2  13 4523.846
model112.anki2  13 4534.987
model113.anki2  13 4529.887
model114.anki2  13 4534.754
model115.anki2  13 4531.423
model116.anki2  13 4533.868
model117.anki2  17 4524.862
model118.anki2  17 4536.955
model119.anki2  17 4530.527
model120.anki2  17 4554.046
model121.anki2  17 4532.957
model122.anki2  17 4534.010
model123.anki2  17 4530.739
model124.anki2  17 4526.688
model125.anki2  17 4540.927
model126.anki2  17 4539.409
model127.anki2  22 4533.057
model128.anki2  22 4530.678
model129.anki2  22 4539.774
model130.anki2  22 4540.083
model131.anki2  22 4535.744
model132.anki2  28 4538.494

```



- anki2も同様に32通りのモデルを作成
- モデルの作成が終わったら全てのモデルのAICを算出
- model11.anki2(naitekiとdoutukaに変量効果を仮定)したものが最もAICが低い
- summary(model11.anki2)を実行してモデルの中身を見る

```

>
> |

```

```
> summary(model11.anki2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood t-tests use Satterthwaite
approximations to degrees of freedom [lmerMod]
Formula: anki2 ~ anki1.cwc + naiteki.cwc + douituka.cwc + toriire.cwc +
  gaiteki.cwc + (1 + naiteki.cwc + douituka.cwc | class)
Data: dat
```

```
      AIC      BIC    logLik deviance df.resid
4523.8  4596.7  -2248.9  4497.8    1987
```

```
Scaled residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.4709 -0.6325  0.0311  0.6088  3.8345
```

```
Random effects:
Groups Name          Variance Std.Dev. Corr
class  (Intercept)  0.01475  0.1215
       naiteki.cwc 0.02052  0.1433  -0.20
       douituka.cwc 0.02527  0.1590  0.00 -0.95
Residual                0.53239  0.7296
Number of obs: 2000, groups: class, 67
```

```
Fixed effects:
              Estimate Std. Error      df t value Pr(>|t|)
(Intercept)   2.76561    0.02207  66.80000  125.339 < 2e-16 ***
anki1.cwc     0.39382    0.01876 1915.80000   20.988 < 2e-16 ***
naiteki.cwc  -0.07813    0.03081   73.00000   -2.536  0.0134 *
douituka.cwc  0.03267    0.03299   71.90000    0.990  0.3253
toriire.cwc   0.05773    0.02839 1898.90000    2.033  0.0421 *
gaiteki.cwc   0.10508    0.02676 1905.50000    3.927 8.91e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Correlation of Fixed Effects:
      (Intr) anki1.c ntk.cw dtk.cw trr.cw
anki1.cwc  0.000
naiteki.cwc -0.078  0.133
douituk.cwc  0.002  0.050 -0.506
toriire.cwc  0.000 -0.077 -0.203 -0.222
gaiteki.cwc  0.000 -0.135  0.184 -0.038 -0.352
```

```
>
> |
```

変量効果の分散

固定効果の回帰係数
標準誤差
自由度
t 値
回帰係数の有意性検定

固定効果同士の相関

学級レベルの変数の投入

- rikai_tとnichijo_tについて，以下のスクリプトを実行

```
>
> #学級レベルの変数の中心化
> dat<-transform(dat,
+ rikai_tc=ri kai_t-mean(ri kai_t),
+ nichijo_tc=nichijo_t-mean(nichijo_t))
>
> #データに追加されているか確認
> head(dat, 3)
  student class naiteki douituka toriare gaiteki rikail rikai2 anki1
1       1     1       4     4.00   2.33   1.67   3.00   3.33   4.67
2       2     1       4     3.67   2.00   1.67   4.33   4.67   2.67
3       3     1       1     1.33   2.33   3.00   3.00   3.00   4.33
  anki2 rikai_t nichijo_t naiteki.cwc douituka.cwc toriare.cwc
1  4.00   4.5     3     1.356897   0.6548276   0.1237931
2  3.00   4.5     3     1.356897   0.3248276  -0.2062069
3  4.33   4.5     3    -1.643103  -2.0151724   0.1237931
  gaiteki.cwc rikail.cwc anki1.cwc rikai_tc nichijo_tc
1  -0.3193103 -0.7468966  1.8537931 -0.027375  -0.265035
2  -0.3193103  0.5831034 -0.1462069 -0.027375  -0.265035
3   1.0106897 -0.7468966  1.8137931 -0.027375  -0.265035
>
> |
```

各得点から全体平均を引いた値をdatに追加

正しく追加されていることがわかる

学級レベルの変数の投入

- 集団レベルの変数を先ほど作成したモデルに追加して再分析

- `result.rikai2<-`
`lmer(rikai2~rikai1.cwc+naiteki.cwc+doutuka.cwc+toriire`
`.cwc+gaiteki.cwc+`
`rikai_tc+nichijo_tc+rikai1:rikai_tc+rikai1:nichijo_tc+gaite`
`ki.cwc:rikai_tc+gaiteki.cwc:nichijo_tc+`
`(1+rikai1.cwc+gaiteki.cwc|class),data=dat,REML=F)`

- 学級レベルの変数とレベル間交互作用を追加
- `summary(result.rikai2)`で結果表示

```

> result.rikai2<-lmer(rikai2~rikail.cwc+naiteki.cwc+doutituka.cwc+toriire.cwc+gaiteki.cwc+
+ rikai_tc+nichijo_tc+rikail:rikai_tc+rikail:nichijo_tc+gaiteki.cwc:rikai_tc+gaiteki.cwc:nichijo_tc+
+ (1+rikail.cwc+gaiteki.cwc|class),data=dat,REML=F)
> summary(result.rikai2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood t-tests use Eigen and Eigen for Hessian
Formula: rikai2 ~ rikail.cwc + naiteki.cwc + doutituka.cwc + toriire.cwc +
  gaiteki.cwc + rikai_tc + nichijo_tc + rikail:rikai_tc + rikail:nichijo_tc +
  gaiteki.cwc:rikai_tc + gaiteki.cwc:nichijo_tc + (1 + rikail.cwc +
  gaiteki.cwc | class)
Data: dat

           AIC      BIC    logLik deviance df.resid
    4448.4    4854.8   -2205.2    4410.4     1981

Scaled residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.9639 -0.6373  0.0199  0.6591  3.9951

Random effects:
 Groups Name      Variance Std.Dev. Corr
class  (Intercept) 0.022568  0.15023
      rikail.cwc  0.005118  0.07154  -0.32
      gaiteki.cwc 0.014605  0.12085   0.23  0.85
Residual              0.508571  0.71314
Number of obs: 2000, groups: class, 67

Fixed effects:
              Estimate Std. Error      df t value Pr(>|t|)
(Intercept)    3.054e+00  2.439e-02  6.660e+01 125.217 < 2e-16 ***
rikail.cwc     4.894e-01  2.327e-02  1.775e+02  21.030 < 2e-16 ***
naiteki.cwc    2.262e-01  2.662e-02  1.923e+03   8.498 < 2e-16 ***
doutituka.cwc  6.533e-02  2.656e-02  1.924e+03   2.460  0.013978 *
toriire.cwc   -2.023e-02  2.755e-02  1.928e+03  -0.734  0.462954
gaiteki.cwc    2.464e-02  2.991e-02  9.630e+01   0.824  0.412050
rikai_tc      -4.189e-01  1.871e-01  8.090e+01  -2.239  0.027932 *
nichijo_tc     4.342e-01  1.106e-01  8.340e+01   3.925  0.000177 ***
rikai_tc:rikail 1.015e-01  5.262e-02  1.014e+02   1.929  0.056506 .
nichijo_tc:rikail -8.977e-02  3.073e-02  1.059e+02  -2.922  0.004257 **
gaiteki.cwc:rikai_tc -2.866e-02  7.540e-02  7.500e+01  -0.380  0.704971
gaiteki.cwc:nichijo_tc 4.083e-03  4.362e-02  7.210e+01   0.094  0.925682
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

変量効果の分散

固定効果の回帰係数
標準誤差
自由度
t 値
回帰係数の有意性検定

この下にさらに
固定効果同士の相関
が続く

学級レベルの変数の投入

- スクリプトには直後に単純主効果の話が書かれているがrikai2については省略
- 続いてanki2に関しても同様に学級レベルの変数(+レベル間交互作用)を投入して実行


```
> summary(result.anki2)
Linear mixed model fit by maximum likelihood t-tests use Satterthwaite approximations to degrees of
freedom [lmerMod]
Formula: anki2 ~ anki1.cwc + naiteki.cwc + douituka.cwc + toriire.cwc +
  gaiteki.cwc + rikai_tc + nichijo_tc + naiteki:rikai_tc +
  naiteki:nichijo_tc + douituka:rikai_tc + douituka:nichijo_tc +
  (1 + naiteki.cwc + douituka.cwc | class)
Data: dat
```

```
      AIC      BIC    logLik deviance df.resid
4525.9   4632.3  -2244.0   4487.9     1981
```

```
Scaled residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.9575 -0.6238  0.0384  0.6158  3.9003
```

```
Random effects:
Groups   Name              Variance Std.Dev. Corr
class   (Intercept)    0.01337  0.1156
        naiteki.cwc  0.01566  0.1251  -0.21
        douituka.cwc 0.01905  0.1380  -0.01 -0.96
Residual                0.53286  0.7300
Number of obs: 2000, groups: class, 67
```

```
Fixed effects:
              Estimate Std. Error      df t value Pr(>|t|)
(Intercept)    2.75899    0.02176  68.10000  126.802 < 2e-16 ***
anki1.cwc       0.39357    0.01874 1915.50000   21.000 < 2e-16 ***
naiteki.cwc    -0.07820    0.02957   72.40000   -2.645  0.010013 *
douituka.cwc   0.03480    0.03149   71.00000    1.105  0.272907
toriire.cwc    0.05812    0.02835 1900.60000    2.050  0.040503 *
gaiteki.cwc    0.10266    0.02679 1912.70000    3.832  0.000131 ***
rikai_tc       0.23589    0.21638   62.20000    1.090  0.279835
nichijo_tc     -0.18130    0.12446   55.70000   -1.457  0.150828
rikai_tc:naiteki  0.15200    0.07577   72.80000    2.006  0.048567 *
nichijo_tc:naiteki 0.01146    0.04302   72.80000    0.266  0.790654
rikai_tc:douituka -0.18122    0.08102   72.80000   -2.237  0.028364 *
nichijo_tc:douituka 0.03303    0.04652   67.00000    0.710  0.480191
---
```

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

変量効果の分散

固定効果の回帰係数
標準誤差
自由度
t 値
回帰係数の有意性検定

この下にさらに
固定効果同士の相関
が続く

単純主効果の検定

- rikai2についてはrikai1.cwc*nichijo_tc,
anki2についてはnaiteki.cwc*rikai_tc,
doutuka.cwc*rikai_tcで有意な交互作用がみられた
- 最も回帰係数の絶対値が大きい
doutuka.cwc*rikai_tcで単純主効果の検定を
行ってみる
(スクリプトは一番最後)

単純主効果の検定

- 単純主効果の検定に必要なもの
 - 階層線形モデルの推定結果
 - 既にsummary(result.anki2)で算出済み
 - 2変数の標準偏差
 - sd(dat\$doutuka.cwc)とsd(dat\$rikai_tc)で算出
 - 回帰係数の共分散行列
 - vcov.merMod(result.anki2)で算出
- 準備ができれば、
<http://www.quantpsy.org/interact/hlm2.htm>
にアクセス

Case3を使用: $x_1 = \text{doutuka.cwc}$, $w_1 = \text{rikai_tc}$ に相当

分散

切片・回帰係数

共分散

rikai_tcの $\pm 1SD$

doutuka.cwcの $\pm 1SD$

切片と doutuka.cwcの
自由度

Case 3: as focal predictor; w₁: moderator

$$\hat{y} = \hat{\gamma}_{00} + \hat{\gamma}_{10}x_1 + \hat{\gamma}_{01}w_1 + \hat{\gamma}_{11}w_1x_1$$

Regression Coefficient	Customized Statistics	Conditional Values
$\hat{\gamma}_{00}$	$\hat{\gamma}_{00}$	$\hat{\gamma}_{00}$
$\hat{\gamma}_{10}$	$\hat{\gamma}_{10}$	$\hat{\gamma}_{10}$
$\hat{\gamma}_{01}$	$\hat{\gamma}_{01}$	$\hat{\gamma}_{01}$
$\hat{\gamma}_{11}$	$\hat{\gamma}_{11}$	$\hat{\gamma}_{11}$
Coefficient Covariance	Degrees of Freedom	Other Information
$\hat{\gamma}_{00}$	df_{00}	$\hat{\gamma}_{00}$
$\hat{\gamma}_{10}$	df_{10}	$\hat{\gamma}_{10}$
$\hat{\gamma}_{01}$	df_{01}	$\hat{\gamma}_{01}$
$\hat{\gamma}_{11}$	df_{11}	$\hat{\gamma}_{11}$

summary(result.anki2)より

Fixed effects:

	Estimate	Std. Error	df	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	★ 2.75899	0.02176	★ 68.10000	126.802	< 2e-16	***
anki1.cwc	0.39357	0.01874	1915.50000	21.000	< 2e-16	***
naiteki.cwc	-0.07820	0.02957	72.40000	-2.645	0.010013	*
douituka.cwc	★ 0.03480	0.03149	★ 71.00000	1.105	0.272907	
toriire.cwc	0.05812	0.02835	1900.60000	2.050	0.040503	*
gaiteki.cwc	0.10266	0.02679	1912.70000	3.832	0.000131	***
rikai_tc	★ 0.23589	0.21638	62.20000	1.090	0.279835	
nichijo_tc	-0.18130	0.12446	55.70000	-1.457	0.150828	
rikai_tc:naiteki	0.15200	0.07577	72.80000	2.006	0.048567	*
nichijo_tc:naiteki	0.01146	0.04302	72.80000	0.266	0.790654	
rikai_tc:douituka	★ -0.18122	0.08102	72.80000	-2.237	0.028364	*
nichijo_tc:douituka	0.03303	0.04652	67.00000	0.710	0.480191	

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

vcov.merMod(result.anki2)より

```

> vcov.merMod(result.anki2)#共分散行列の出力
12 x 12 Matrix of class "dpoMatrix"

      (Intercept)      anki1.cvc      naiteki.cvc      douituka.cvc      toriire.cvc      gaiteki.cvc
(Intercept)  ★ 4.734235e-04  2.833301e-07 -4.854469e-05 -2.470312e-06 -1.591021e-06  2.690675e-06
anki1.cvc      2.833301e-07  3.512211e-04  7.686651e-05  3.080445e-05 -4.070008e-05 -6.732631e-05
naiteki.cvc    -4.854469e-05  7.686651e-05  8.741303e-04 -4.374775e-04 -1.771726e-04  1.510400e-04
douituka.cvc  ★ -2.470312e-06  3.080445e-05 -4.374775e-04 ★ 9.917087e-04 -2.071416e-04 -3.296532e-05
toriire.cvc    -1.591021e-06 -4.070008e-05 -1.771726e-04 -2.071416e-04  8.038245e-04 -2.679023e-04
gaiteki.cvc    2.690675e-06 -6.732631e-05  1.510400e-04 -3.296532e-05 -2.679023e-04  7.176351e-04
rikai_tc      ★ -1.026979e-04 -1.013074e-05  3.528237e-05  1.137503e-04 -6.134864e-05  2.231827e-04
nichijo_tc     2.301525e-04  1.319398e-05 -3.610943e-05 -2.660414e-05 -6.698892e-05  1.105216e-05
rikai_tc:naiteki -9.019070e-05 -2.595937e-05  7.834800e-06 -2.842001e-06  1.700083e-06 -1.102831e-04
nichijo_tc:naiteki -3.624713e-05  1.648001e-05  1.752322e-06  1.026368e-05  1.255832e-05  1.866243e-05
rikai_tc:douituka  9.639489e-05  2.272223e-05 -1.664184e-05 -3.584785e-05  2.014122e-05  5.902991e-06
nichijo_tc:douituka -4.386708e-05 -1.697690e-05  9.951197e-06  8.209137e-07  1.277149e-05 -1.795986e-05

      rikai_tc      nichijo_tc      rikai_tc:naiteki      nichijo_tc:naiteki      rikai_tc:douituka
(Intercept)  -1.026979e-04  2.301525e-04 -9.019070e-05 -3.624713e-05  9.639489e-05
anki1.cvc     -1.013074e-05  1.319398e-05 -2.595937e-05  1.648001e-05  2.272223e-05
naiteki.cvc   3.528237e-05 -3.610943e-05  7.834800e-06  1.752322e-06 -1.664184e-05
douituka.cvc  1.137503e-04 -2.660414e-05 -2.842001e-06  1.026368e-05 -3.584785e-05
toriire.cvc   -6.134864e-05 -6.698892e-05  1.700083e-06  1.255832e-05 ★ 2.014122e-05
gaiteki.cvc   2.231827e-04  1.105216e-05 -1.102831e-04  1.866243e-05 ★ 5.902991e-06
rikai_tc      ★ 4.681873e-02 -1.272334e-02 -2.954190e-03  8.094482e-04 ★ -1.213461e-02
nichijo_tc    -1.272334e-02  1.549047e-02  7.313000e-04 -9.860397e-04  3.258512e-03
rikai_tc:naiteki -2.954190e-03  7.313000e-04  8.740992e-03 -1.565657e-03 -3.366890e-03
nichijo_tc:naiteki  8.094482e-04 -9.860397e-04 -1.565657e-03  1.850635e-03  9.527300e-04
rikai_tc:douituka -1.213461e-02  3.258512e-03 -3.366890e-03  9.527300e-04 ★ 6.563626e-03
nichijo_tc:douituka  3.199136e-03 -3.919563e-03  9.796486e-04 -1.126823e-03 -1.798333e-03

      rikai_tc:douituka
(Intercept)  -4.386708e-05
anki1.cvc     -1.697690e-05
naiteki.cvc   9.951197e-06
douituka.cvc  8.209137e-07
toriire.cvc   1.277149e-05
gaiteki.cvc   -1.795986e-05
rikai_tc      3.199136e-03
nichijo_tc    -3.919563e-03
rikai_tc:naiteki  9.796486e-04
nichijo_tc:naiteki -1.126823e-03
rikai_tc:douituka -1.798333e-03
nichijo_tc:douituka  2.164221e-03

```

記入後

Case 3: x_1 : focal predictor; w_1 : moderator

$$\hat{y} = \hat{\gamma}_{00} + \hat{\gamma}_{10}x_1 + \hat{\gamma}_{01}w_1 + \hat{\gamma}_{11}w_1x_1$$

Regression Coefficients		Coefficient Variances		Conditional Values	
$\hat{\gamma}_{00}$	2.75500	$\hat{\gamma}_{00}$	4.754256e-04	$w_{1(1)}$	-0.4165919
$\hat{\gamma}_{10}$	0.00490	$\hat{\gamma}_{10}$	9.917107e-04	$w_{1(2)}$	
$\hat{\gamma}_{01}$	0.03509	$\hat{\gamma}_{01}$	4.081873e-03	$w_{1(3)}$	0.4185519
$\hat{\gamma}_{11}$	-0.18132	$\hat{\gamma}_{11}$	3.56305e-03	$x_{1(1)}$	-0.303878
Coefficient Covariances		Degrees of Freedom*		$x_{1(2)}$	
$\hat{\gamma}_{01,01}$	1.021575e-04	df_{tot}	88.10000	$x_{1(3)}$	0.712971
$\hat{\gamma}_{10,11}$	1.504755e-05	df_{eq}	71.00000	Other Information	
$\hat{\gamma}_{00,10}$	2.470312e-05	Reset		α	05
$\hat{\gamma}_{01,11}$	1.213401e-02	Calculate			
<input type="checkbox"/>	Check this box if w_1 is dichotomous.				
Status:					

Calculateを押して計算

Check this box if w_1 is dichotomous

Status: Status okay

w_1 at upper bound of region = 2.0274
 (simple slopes are significant outside this region)

Simple Intercepts and Slopes at Conditional Values of w

At $w_1(1)$...

simple intercept = 2.68(0.0938), t=28.952, p=0
 simple slope = 0.1108(0.0467), t=2.3753, p=0.0202

At $w_1(3)$...

simple intercept = 2.658(0.0929), t=30.7646, p=0
 simple slope = -0.0412(0.046), t=-0.8962, p=0.3732

Simple Intercepts and Slopes at Region Boundaries for w

Lower Bound...

```

xx <- c(-0.7039,0.7039) # <-- change to alter plot dims
yy <- c(2.521,2.887) # <-- change to alter plot dims
leg <- c(-0.7039,2.5687) # <-- change to alter legend location
x <- c(-0.7039,0.7039) # <-- x-coords for lines
y1 <- c(2.532,2.738)
y3 <- c(2.887,2.8289)
plot(xx,yy,type='n',font=2,font.lab=2,xlab='x1',ylab='Y'
Interaction Plot')
lines(x,y1,lwd=3,lty=1,col=1)
lines(x,y3,lwd=3,lty=8,col=3)
points(x,y1,col=1,pch=16)
points(x,y3,col=1,pch=16)

```

Submit above to Rweb Erase R code

```

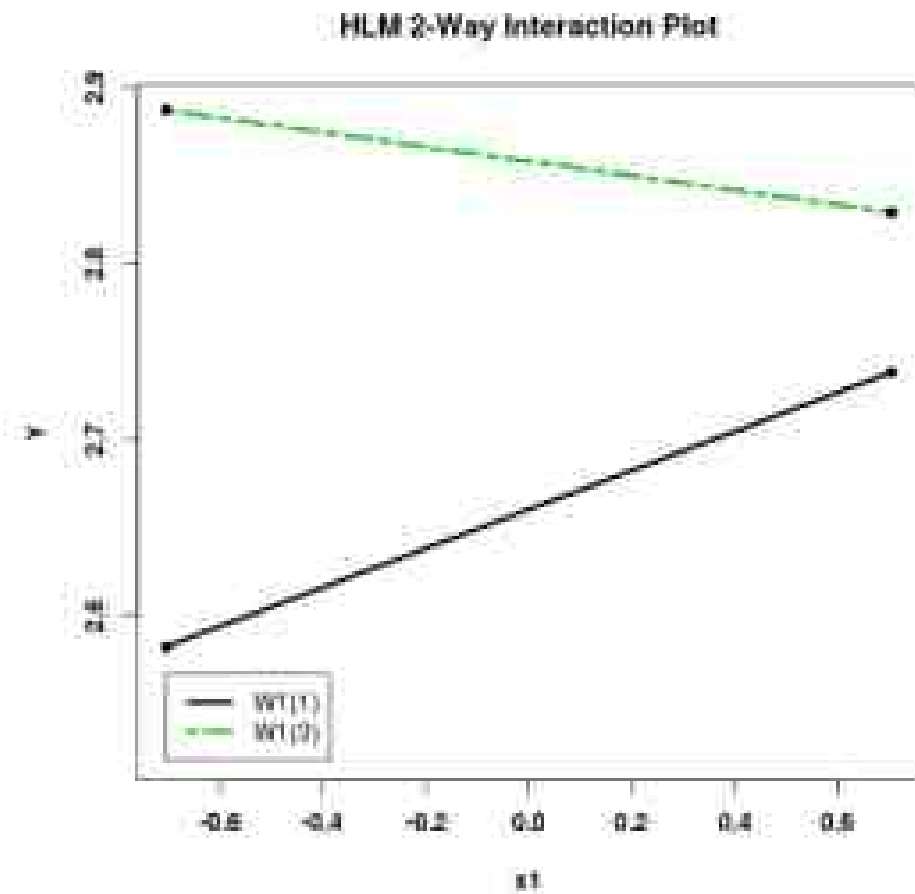
z1=-10 #supply lower bound for w1 here
z2=10 #supply upper bound for w1 here
z <- seq(z1,z2,length=1000)
fz <- c(z,z)
y1 <- (0.0949+-0.18122*z)+(1.9939*sqrt(0.0009917087+(2*z+-0.00003584785)+
((z^2)+0.00563628)))
y2 <- (0.0949+-0.18122*z)-(1.9939*sqrt(0.0009917087+(2*z+-0.00003584785)+

```

w_1 (理解方略低)のとき回帰係数が有意
 w_3 (理解方略高)のとき回帰係数は非有意

押すとグラフを出力

Images



参考文献

- 南風原朝和(2014). 続・心理統計学の基礎 統合的理解を広げ深める 有斐閣アルマ
 - 尾崎幸謙(2009). マルチレベル・潜在曲線モデルにおける独立変数の中心化. 豊田秀樹(編) 共分散構造分析 ー実践編ー (pp.1-14).
 - 榊美知子(2007). 自伝的記憶の感情情報はどのように保持されているのかー領域構造の観点からー 教育心理学研究, 55, 184-196 * 実験データにHLMを適用している例
 - 清水裕士(2014). 個人と集団のマルチレベル分析 ナカニシヤ出版
 - 鈴木雅之(2015). 心理学における調査研究(1). 山田剛史(編) Rによる心理学研究法入門 (pp.147-171) 北大路書房
 - Barcikowski, R. S.(1981) Statistical power with group mean as the unit of analysis. *Journal of Educational Statistics*, 6(3), 267-85.
 - 2015年度心理データ解析演習 平岡さんのスライド
- <以下は厳密には線形混合モデルの文献>
- 神長 伸幸・井上 雅勝・新井 学(2012) t検定・分散分析から混合モデルへ：文理解研究の導入事例から学ぶ. 日本認知科学会第29回大会発表論文集, 34- 39.
 - Baayen, R. H., Davidson, D. J., & Bates, D. M. (2008). Mixed-effects modeling with crossed random effects for subjects and items. *Journal of Memory and Language*, 59, 390–412.